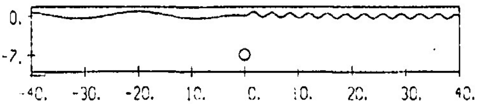
току, а более короткие капиллярно-гравитационные волны – вверх по течению.

Для решения интегрального уравнения и вычисления гидродинамических характеристик потока разработан алгоритм и программа на Fortran PowerStation. Проведены систематические числовые расчеты. Пример расчета волн при бесциркуляционном обтекании цилиндра радиуса a=0.002 для глубины погружения h/a=7, числе Фруда $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{ga}$ =2 и коэффициенте поверхностного натяжения α=0.074



представлен на рисунке, где линейные размеры отнесены к радиусу.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-173).

В. И. Жегалов, Е. А. Уткина (Казань)

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv \sum_{\alpha,\beta=0}^{2} \sum_{\gamma=0}^{1} a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma u = F(x,y,z), \qquad (1)$$

D_z^0 – единичный оператор; $D_z^i = \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^i$, $i = 1,2,\ldots$; $D_z^i = \int\limits_{z_0}^{z} \dfrac{(z-t)^{-i-1}}{(-i-1)!}$,

$i = -1,-2,\ldots$ $a_{221} \equiv 1, a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}(\overline{D})$, $F \in C^{2+2+1}(\overline{D})$, а $C^{\alpha+\beta+\gamma}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$ функций вместе с их производными $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ $(r = 0,\ldots,\alpha; s = 0,\ldots,\beta;\ t = 0,\ldots,\gamma)$.

Обозначим через X, Y, Z - грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Задача (Гурса). *Найти в D решение уравнения* (1) *класса C^{2+2+1}, удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_X = \varphi(y,z),\ u|_Y = \psi(x,z),\ u|_Z = \theta(x,y), u_x|_X = \varphi_1(y,z),$$
$$u_y|_Y = \psi_1(x,z), \theta \in C^{2+2}(\overline{Z}),\ \varphi,\varphi_1 \in C^{2+1}(\overline{X}),\ \psi,\psi_1 \in C^{2+1}(\overline{Y}). \qquad (2)$$

На ребрах D предположим выполненными условия согласования

$$\varphi(y_0, z) = \psi(x_0, z),\ \varphi(y, z_0) = \theta(x_0, y),\ \psi(x, z_0) = \theta(x, y_0)$$

При решении задачи развивается метод из работы [1]. Функцией Римана $R(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma)$ будем называть решение интегрального уравнения

$$V - \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{\substack{k=0 \\ i+j+k<5}}^{1} (-1)^{i+j+k} D_x^{i-2} D_y^{j-2} D_z^{k-1} \left(a_{ijk} V\right) = 1, \qquad (3)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении тождества

$$D_x^2 D_y^2 D_z^1 (uR) \equiv RL(u) + \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{\substack{k=0 \\ 5>i+j+k>0}}^{1} (-1)^{i+j+k} D_x^i D_y^j D_z^k \Big[u\Big(D_x^{2-i} D_y^{2-j} D_z^{1-k} R -$$

$$- \sum_{\alpha=i}^{2} \sum_{\beta=j}^{2} \sum_{\substack{\gamma=k \\ \alpha+\beta+\gamma<5}}^{1} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} D_x^{\alpha-i} D_y^{\beta-j} D_z^{\gamma-k} \left(a_{\alpha\beta\gamma} R\right)\Big)\Big] +$$

$$+ D_x^1 \left\{ \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} D_y^i D_z^j (u) D_x^1 \left(a_{2ij} R\right) \right\} \qquad (4)$$

Меняя в (4) ролями переменные x с ξ, y с η, z с ς и вычисляя затем от правой и левой части тройной интеграл в пределах $x_0 \le \xi \le x$, $y_0 \le \eta \le y$, $z_0 \le \varsigma \le z$ с учетом некоторых свойств, вытекающих (3), придем к формуле, дающей запись u_{xy} через граничные условия (2) и функцию R. Отсюда очевидным интегрированием определяется решение $u(x, y, z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка*// Изв. вузов. Математика, –1999 – No.10, – С.73-76.